შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

01.05.2011/ მათ/ IV/ 370

ამოცანა № 1

გვერდი № 1

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{4\sqrt[3]{3}}+\dots+\frac{1}{(k+1)\sqrt[3]{k}}+\dots+\frac{1}{2012\cdot\sqrt[3]{2011}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt[3]{2\cdot1\cdot1}}+\frac{1}{4\sqrt[3]{3\cdot1\cdot1}}+\dots+\frac{1}{(k+1)\sqrt[3]{k\cdot1\cdot1}}+\dots+\frac{1}{2012\sqrt[3]{2011\cdot1\cdot1}}<$$

$$<\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot\frac{2+2}{3}}+\frac{1}{4\frac{3+2}{3}}+\dots+\frac{1}{(k+1)\frac{k+2}{3}}+\dots+\frac{1}{2012\cdot\frac{2013}{3}}=\frac{3}{2}+\frac{3}{3\cdot4}+\frac{3}{4\cdot5}+\dots+\frac{3}{k\cdot k+1}+\dots+\frac{3}{2012\cdot2013}=$$

$$=3\left(\frac{1}{2}+\frac{4-3}{3\cdot4}+\frac{5-4}{5\cdot4}+\dots+\frac{(k+1)-k}{k\cdot(k+1)}+\dots+\frac{2013-2012}{2013\cdot2012}\right)=3\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{2012}-\frac{1}{2013}\right)=$$

$$=3\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2013}\right)<3\cdot1=3.$$ ე.ი. $$\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{4\sqrt[3]{3}}+\dots+\frac{1}{(k+1)\sqrt[3]{k}}+\dots+\frac{1}{2012\sqrt[3]{2011}}<3$$ რ.დ.გ.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

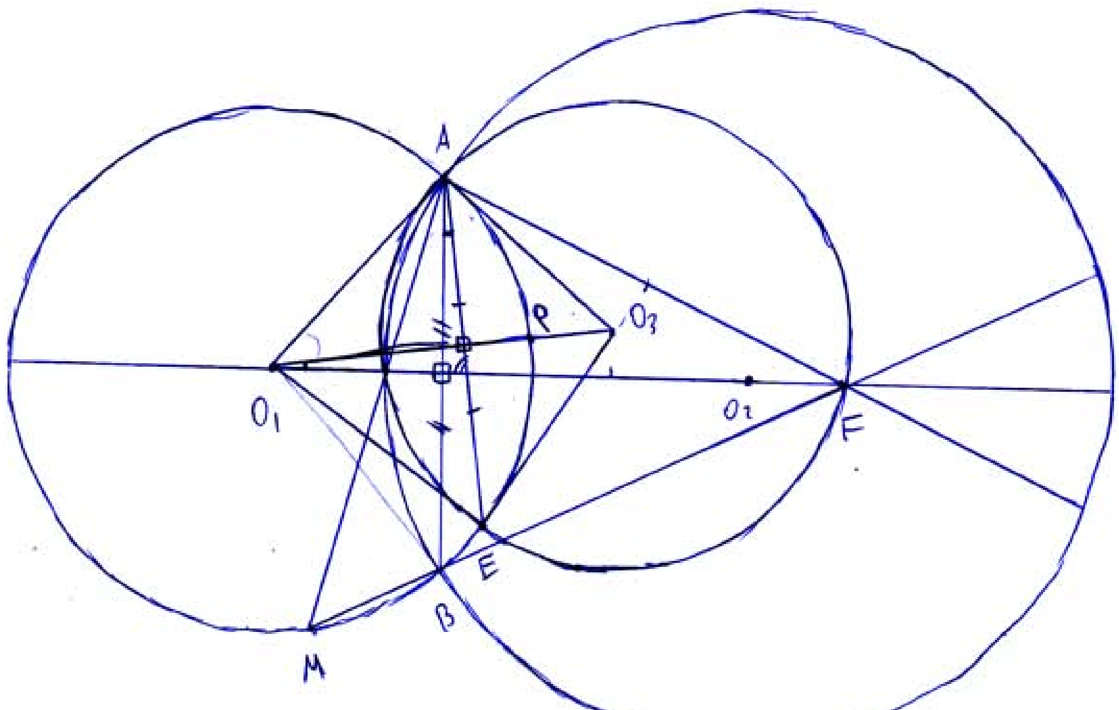
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

01.05.2011/ მათ/ IV/ 370

ამოცანა № 2

გვერდი № 1



დავამტკიცოთ რომ O_1E არის ω_3-ის მხები. ეს იგი კი ნიშნავს რომ $\angle O_1EO_3 = 90^\circ$ [illegible] [illegible]. ვინაიდან $O_1A=O_1E$ ([illegible] ω_1 წრეწირის) და $O_1O_3 \perp AE$ (ორი გადამკვეთი წრეწირის ცენტრების შემაერთებელი მონაკვეთი მათი საერთო ქორდის მართობულია) ამიტომ O_1O_3 არის EO_1A კუთხის ბისექტრისა ანუ $\angle O_3O_1A=\angle O_3O_1E$. ~~[illegible]~~ ხოლო ვინაიდან $O_1A=O_1E$, $AO_3=O_3E$ და O_1O_3 ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ საერთოა [illegible] O_1O_3E სამკუთხედის და O_1O_3A სამკუთხედის ამიტომ $\triangle O_1O_3E=\triangle O_1O_3A \Rightarrow \angle O_1AO_3=\angle O_1EO_3$. ხოლო ეს ვიცით რომ ოთხკუთხედი O_1EO_3A [illegible] [illegible] [illegible] რომ $O_1AO_3+O_1EO_3=180^\circ$.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

01.05.2011/ მათ/ IV/ 370

ამოცანა № 2

გვერდი № 2

$= 2 \cdot O_1EO_3$ და მივიღებთ რომ $\angle O_1EO_3 = 90^\circ$. და სხვანაირად დავწერ რომ
O_1EO_3A ოთხკუთხედზე წრეწირი შემოიხაზება. და ვაჩვენოთ რომ ~~[illegible]~~
~~[illegible]~~ $\angle EO_1O_3 = \angle EAO_3$ მაშინ ოთხკუთხედი O_1EO_3A ჩაიხაზე-
ბადია. ვიცით O_1O_3 და EO_1A [illegible] [illegible] [illegible] p
[illegible] AE [illegible] [illegible] [illegible] $\angle EO_1O_3 = \angle EO_1p = \overset{\frown}{EP} = \frac{\overset{\frown}{EA}}{2}$
მაგრამ $\angle AEO_3 = \frac{\overset{\frown}{AE}}{2}$ და მივიღეთ რომ $\angle EO_1O_3 = \angle AEO_3$.
ანუ ოთხკუთხედი O_1EO_3A-ჩახაზულია და $\angle O_1EO_3 = 90^\circ$ რ.დ.გ

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

01.05.2011/ მათ/ IV/ 370

ამოცანა № 3

გვერდი № 1

~~ვაჩვენოთ რომ f(x)-ის ხარისხი ნაკლებია ან ტოლი 1-ზე.~~
~~თუ f(x)-ის ხარისხი მეტია 1-ზე მაშინ f~~

პირველ რიგში ვაჩვენოთ რომ N_0 არის უსასრულო სიმრავლე. მართ-ლაც თუ რაიმე ნატურალური ვთქვათ x ნატურალური x მაშინ $f(f(x))=(x+2011)\in N_0$. ასე თუ $x\in N_0$ მაშინ $x+2011\in N_0$ ანალოგიურად $(x+2\cdot2011)\in N_0, \ldots, (x+k\cdot2011)\in N_0$ სადაც $k\in N$ ასე N_0 შეიცავს უსასრულოდ ბევრ ~~ელემენტს)~~ (~~რადგან ყველა~~ ~~...~~) რადგან ყოველი k შეგვიძლია ავიღოთ უსასრულოდ დიდი მაშინ N_0-ში ~~შეიცავს~~ ~~ელემენტს~~ შეგვიძლია ვიპოვოთ უსასრულოდ დიდი $y\in N_0$.

ვაჩვენოთ რომ $f(x)$-ის ხარისხი ნაკლებია 2-ზე. თუ მისი ხარისხი მეტია 1-ზე მაშინ $f(x)$ ~~უსასრულოდ დიდი x-ისთვის იქნება ან კლებადი~~ იქნება შემდეგი სახის: $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ სადაც n არის ფუნქციის ხარისხი. ეს ფუნქცია იქნება ზრდადი უსასრულოდ დიდი x-ისთვის თუ $a_n>0$ და კლებადი თუ $a_n<0$ ~~მაშინ~~ ასე ~~f(f(x)) იქნება~~ ~~უსასრულოდ დიდი ზრდადი უსასრულოდ~~ $f(f(x))$-იც იქნება n ხარისხის ან

მოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

01.05.2011/ მათ/ IV/ 370

ამოცანა № 3

გვერდი № 2

[illegible] თუ [illegible] X-ისთვის [illegible] ($x \leq 0$) [illegible] 0-ზე [illegible] $y > x$ და $y \in Z$ [illegible] $f(y) < 0$. [illegible] $f(x)$ [illegible] N_0-[illegible] N_0-[illegible]. [illegible] თუ $f(x)$-[illegible] ~~[illegible]~~ ([illegible] X-ისთვის) [illegible] $f(f(x))$ [illegible] X-ისთვის [illegible] $g(x) = x + 2011$-ი [illegible] $f(f(x)) = x + 2011$ [illegible]. ([illegible] X-[illegible] N_0 [illegible]) [illegible].

ე.ი. $f(x)$-ის ხარისხი [illegible] 2-ზე თუ $f(x)$-[illegible]

$f(x) = kx + b$. $\Rightarrow f(f(x)) = f(kx + b) = k(kx + b) + b = k^2x + (k+1)b$. [illegible] $f(f(x)) = x + 2011$ [illegible] $k^2 = 1 \Rightarrow k = 1$ ან $k = -1$ [illegible] თუ $k = -1$ [illegible] $f(f(x)) = x + (-1+1)b = x$ [illegible] $k = 1$ [illegible]. $2b = 2011 \Rightarrow b = \frac{2011}{2}$ [illegible] $f(f(x)) = x + 2b = x + 2011$ [illegible] $f(x)$ [illegible] N_0-[illegible] N_0-[illegible] $x + \frac{2011}{2}$-[illegible] $f(f(x))$ - [illegible] X-ზე [illegible] $f(x)$-[illegible], X-[illegible] X-ის ხარისხი [illegible] 0-ზე. [illegible] $f(x)$-[illegible]

SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №	01.05.2011/ მათ/ IV/ 370

ამოცანა № 3

გვერდი № 3

(ასევე შეიძლება [illegible] რომ თუ №-2 [illegible] [illegible] [illegible]
[illegible] №-1 [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]
[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] 0-ს [illegible] [illegible]
$f(f(0))=2011$ [illegible] თუ $f(x)$-ი [illegible] [illegible] [illegible] b
[illegible] $2b=2011$ [illegible] $b=\frac{204}{2}$ [illegible] $f(0)=\frac{2011}{2}$ [illegible] [illegible]
[illegible] [illegible] [illegible] რომ $f(x)$-ი [illegible] [illegible] [illegible]
[illegible] [illegible] $f(f(x))$ [illegible] [illegible] [illegible]
და $f(f(x))$ [illegible] [illegible] x-[illegible] [illegible] [illegible] x-ს
$x+2011$.) [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]
[illegible] [illegible] [illegible] - [illegible]